Title	関数環上の後退シフト作用素 (コロフキン型近似定理)
Author(s)	高木, 啓行
Citation	数理解析研究所講究録 (2002), 1243: 49-51
Issue Date	2002-01
URL	http://hdl.handle.net/2433/41659
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録 1243 巻 2002 年 49-51

関数環上の後退シフト作用素

信州大理　高木 啓行 (Hiroyuki Takagi)

最近, 様々な Banach 空間上で シフト作用素が 研究されている. ここでは, 関数環上の後退シフト作用素が存在しないことを 報告する.

もっとも基本的な立場で “シフト作用素” というと, 数列空間 ℓ^2 上の作用素

$$S: \begin{array}{c}(a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots) \\ \downarrow \\ (0, a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, \cdots)\end{array} \qquad T: \begin{array}{c}(a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots) \\ \downarrow \\ (a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{n+1}, \cdots)\end{array}$$

を指す. 前者 S は 前進シフト作用素 (unilateral shift operator), 後者 T は 後退シフト作用素 (backward shift operator) と呼ばれる. これらは, ℓ^2 上の有界線形作用素の典型例で, 関数解析学の入門書に よく引き合いに出される. また, 互いに 他の共役作用素になっていることも よく知られている.

ここで, 可分な Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ が, 数列空間 ℓ^2 と 内積空間として同型であることを 思い出そう. そうすると, 上記の 2 つの作用素は $\mathcal{H}$ 上でも 考えられるようになる.

定義 1. $\mathcal{H}$ を 可分な Hilbert 空間とし, S, T を $\mathcal{H}$ 上の有界線形作用素とする.

$$Se_n = e_{n+1} \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$
$$Te_0 = 0, \qquad Te_n = e_{n-1} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

となるような $\mathcal{H}$ の完全正規直交系 $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$ が 存在するとき, S は $\mathcal{H}$ 上の前進シフト作用素, T は $\mathcal{H}$ 上の後退シフト作用素であるという.

$\mathcal{H}$ が 興味深い空間のときが おもしろい. たとえば, 単位開円板 $\mathbb{D}$ 上の Hardy 空間 $H^2(\mathbb{D})$ では, べき乗関数 $\{z^n\}_{n=0}^{\infty}$ が 完全正規直交系になっているから, 作用素 S, T :

$$(Sf)(z) = zf(z)$$
$$(1) \qquad (Tf)(z) = \frac{f(z) - f(0)}{z} \qquad (z \in \mathbb{D},\ f \in H^2(\mathbb{D}))$$

は, それぞれ $H^2(\mathbb{D})$ 上の前進シフト作用素, 後退シフト作用素になる. これらの作用素が, Hardy 空間の研究で 重要な役割を果たしているのは, 周知のとおりである ([2] を参照).

これらの作用素を, さらに一般的に, Banach 空間の上で考えたらどうなるだろう? この疑問は, まったく自然に発せられる. この疑問にもとづく研究は, 1972 年の Crownover の論文 [3] から始まったようである. 彼は 次のような定義をしている.

定義 2. Banach 空間 $\mathcal{B}$ 上の有界線形作用素 S は, 次の 3 つの条件 (i) ～ (iii) をみたすとき, $\mathcal{B}$ 上の前進シフト作用素と呼ばれる.

(i) S は 1 対 1 である.

(ii) S の値域 $\operatorname{ran} S$ の余次元が 1 である.

(iii) $\bigcap_{n=1}^{\infty} \operatorname{ran} S^n = \{0\}$.

この定義は, $\mathcal{B}$ が 可分な Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ の場合, 定義 1 と一致する. 前進シフト作用素については, Holub [6], Gutek, Hart, Jamison and Rajagopalan [5], Farid and Varadarajan [4], Takayama and Wada [9] らが 研究結果を出している. その中で, 後退シフト作用素も論議にあがり, 1988 年, Holub は 次のような定義をした.

定義 3. Banach 空間 $\mathcal{B}$ 上の有界線形作用素 T は, 次の 3 つの条件 (i) ~ (iii) をみたすとき, $\mathcal{B}$ 上の後退シフト作用素と呼ばれる.

(i) T の核 $\ker T$ の次元が 1 である.

(ii) $\|Tf\| = \inf\{\|f+g\| : g \in \ker T\} \quad (f \in \mathcal{B})$.

(iii) $\bigcup_{n=1}^{\infty} \ker T^n$ が $\mathcal{B}$ で 稠密である.

この定義の条件 (ii) は, 「T によって自然に定義される $\mathcal{B}/\ker T$ から $\mathcal{B}$ への 1 対 1 の作用素 $f + \ker T \mapsto Tf$ が 等長作用素になる」という意味である. この定義も, $\mathcal{B}$ が 可分な Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ の場合は, 定義 1 と一致する.

Holub は, 論文 [6] で,

具体的な関数空間において, その上の後退シフト作用素は存在するか?

という主旨の問題を 提起した. そして, コンパクト Hausdorff 空間 X 上の実数値連続関数全体の Banach 空間 $C_{\mathbb{R}}(X)$ について, 次の定理を証明した.

定理 (Holub). X が無限個の点からなり かつ X の連結成分が有限個のとき, $C_{\mathbb{R}}(X)$ 上の 後退シフト作用素は存在しない.

つづいて, Rajagopalan and Sundaresan [7] は, 上の定理の条件を ひとつ落とし,

定理 (Rajagopalan and Sundaresan). X が無限個の点からなるとき, $C_{\mathbb{R}}(X)$ 上の 後退シフト作用素は存在しない.

を証明した. この結果は, X 上の複素数値連続関数全体の Banach 空間 $C(X)$ においても, 成り立つことが予測されるが, 論文 [7] の証明は, この場合には通用しない. そこで, この場合も含めて,

関数環上の後退シフト作用素が存在するか?

という問題を考えてみた. そして 次の結果を得た.

主要定理 無限次元の関数環上の 後退シフト作用素は 存在しない.

有限次元の空間上では, 前進シフト作用素や後退シフト作用素の例を簡単につくることができる. そういう意味で, この定理の "無限次元" の仮定は 本質的である.

この定理によると, ディスク環 $A(\mathbb{D})$ 上の後退シフト作用素は 存在しないことになる. したがって, 式 (1) で定義した Hardy 空間 $H^2(\mathbb{D})$ 上の後退シフト作用素 T を, $A(\mathbb{D})$ 上で考

えた作用素 $\hat{T}$:

$$(\hat{T}f)(z) = \frac{f(z) - f(0)}{z} \qquad (z \in \overline{\mathbb{D}},\ f \in A(\overline{\mathbb{D}})).$$

は, $A(\mathbb{D})$ 上の後退シフト作用素ではない. 実際, $\hat{T}$ は, 定義3の条件 (ii) をみたさない. しかしながら, この作用素を 後退シフト作用素を呼ばずに 何をそう呼ぶのであろうか? 定義3には 少々問題点があるように思われる.

また, 定義2 と定義3は,

T が $\mathcal{B}$ 上の後退シフト作用素のとき,

T の共役作用素 T^* が $\mathcal{B}^*$ 上の前進シフト作用素になる

という意味で 整合性がある. しかし, 前進シフト作用素の共役作用素は かならずしも 後退シフト作用素には ならない. こういう観点からも, 定義2, 3を もう少し 考え直す必要もあるように思われる.

最後に, この方面の成果として, 最近 論文 [8] が出たことを 付記しておく.

追記 : この講演の内容は, 信州大学大学院の有泉浩明くんが修士論文 [1] を作成する際に, 彼と講演者が共同研究したことに もとづいています. また, 和田 淳藏先生の講演 [10] と助言による部分も 含まれています. 先生の変わらぬ暖かいご指導に 感謝の気持ちがたえません.

参 考 文 献

[1] 有泉 浩明 (H. Ari-Izumi), 関数環上の後退シフト作用素について, 修士論文 (信州大), 1998.

[2] J.A. Cima and W.T. Ross, "The Backward Shift on the Hardy Space," A.M.S., 2000.

[3] R.M. Crownover, *Commutants of shifts on Banach spaces*, Michigan Math. J., **19** (1972), 233–247.

[4] F.O. Farid and K. Varadarajan, *Isometric shift operators on* $C(X)$, Canad. J. Math., **46** (1994), 532–543.

[5] A. Gutek, D. Hart, J. Jamison and M. Rajagopalan, *Shift operators on Banach spaces*, J. Funct. Anal., **101** (1991), 97–119.

[6] J.R. Holub, *On shift operators*, Canad. Math. Bull., **31** (1988), 85–94.

[7] M. Rajagopalan and K. Sundaresan, *Backward shifts on Banach spaces* $C(X)$, J. Math. Anal. Appl., **202** (1996), 485–491.

[8] T.M. Rassias and K. Sundaresan, *Generalized backward shifts on Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl., **260** (2001), 36–45.

[9] T. Takayama and J. Wada, *Isometric shift operators on the disc algebra*, Tokyo J. Math., **21** (1998), 115–120.

[10] 和田 淳藏 (J. Wada), Banach 空間上のシフト作用素について, 関数環論とその応用 研究集会 報告集 (早大教育), 2000.